

Tourneols et applications

Sarah Houdaigoui

June 4, 2026

1 Introduction aux tournesols

2 Premières bornes pour les tournesols

3 Les tournesols robustes

4 Applications

Table des matières

- 1 Introduction aux tourneols
- 2 Premières bornes pour les tourneols
- 3 Les tourneols robustes
- 4 Applications

Définition d'un tournesol

Un *tournesol* (sunflower) à w pétales est une collection de w ensembles tel que chaque paire d'ensembles a la même intersection.

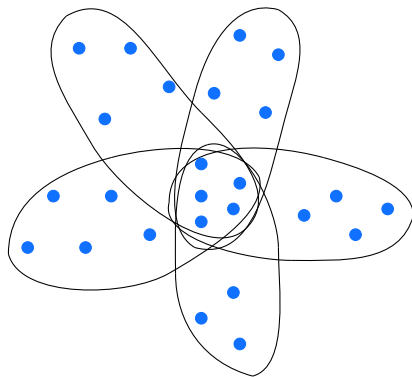


Figure: Un tournesol

L'intersection commune est appelée le *cœur* (core) ou le *noyau* (kernel) du tournesol.

Aussi un tournesol

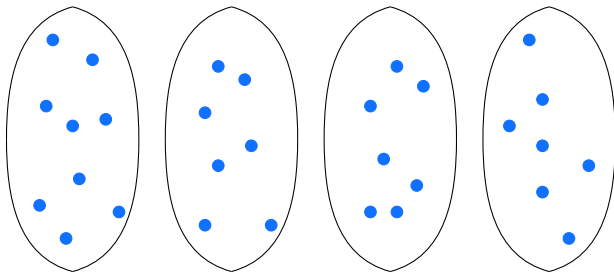
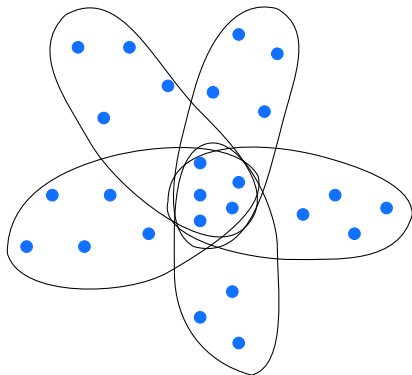


Figure: Aussi un tournesol

Paramètres d'un tournesol



- w : le nombre de pétales du tournesol
- k : la taille maximale des ensembles

Historique des tournesols

- Étudié pour la première fois par Erdős et Rado en 1960, sous le nom de Δ -système (Δ -system)
- Le terme “tournesol” (sunflower) apparaît pour la première fois dans les travaux de Deza et Frankl en 1981

Question sur les tournesols

Combinatoire extrême et théorie de Ramsey

Question sur les tournesols

Combinatoire extrême et théorie de Ramsey

Dans quelles conditions peut-on garantir l'existence d'un tournesol dans une collection d'ensembles ?

Question sur les tournesols

Erdős et Rado ont montré :

Pour w (nombre de pétales) et k (taille maximale des ensembles) fixés, toute large collection d'ensembles doit contenir un tournesol.

Question sur les tournesols

Erdős et Rado ont montré :

Pour w (nombre de pétales) et k (taille maximale des ensembles) fixés, toute large collection d'ensembles doit contenir un tournesol.

Si l'on fixe w et k , combien d'ensembles doit contenir la collection pour que l'existence d'un tournesol soit garantie?

Table des matières

- 1 Introduction aux tournesols
- 2 Premières bornes pour les tournesols**
- 3 Les tournesols robustes
- 4 Applications

Borne supérieure d'Erdős et Rado

Proposition (Lemme du tournesol)

Toute collection de plus de

$$k!(w - 1)^k$$

ensembles de taille au plus k contient un tournesol à w pétales.

w : nombre de pétales du tournesol

k : taille maximale des ensembles

Preuve (1)

→ Preuve (simple) par induction

Preuve (1)

→ Preuve (simple) par induction

\mathcal{S} une collection de $k!(w-1)^k$ ensembles de taille au plus k

Preuve (1)

→ Preuve (simple) par induction

\mathcal{S} une collection de $k!(w-1)^k$ ensembles de taille au plus k

On sélectionne $S_1 \in \mathcal{S}$, puis $S_2 \in \mathcal{S}$ disjoint de S_1 , puis $S_3 \in \mathcal{S}$ disjoint de S_1 et S_2 ...

Preuve (1)

→ Preuve (simple) par induction

\mathcal{S} une collection de $k!(w-1)^k$ ensembles de taille au plus k

On sélectionne $S_1 \in \mathcal{S}$, puis $S_2 \in \mathcal{S}$ disjoint de S_1 , puis $S_3 \in \mathcal{S}$ disjoint de S_1 et S_2 ...

- Si w ensembles deux à deux disjoint : tournesol
- Sinon, $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_j

Preuve (2)

On a $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_i

Preuve (2)

On a $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_i

\Rightarrow un élément de $S_1 \cup \dots \cup S_t$ est contenu dans au moins

$$\frac{k!(w-1)^k}{|S_1 \cup \dots \cup S_t|} \geq (k-1)!(w-1)^{k-1} \text{ ensembles}$$

Preuve (2)

On a $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_i

\Rightarrow un élément de $S_1 \cup \dots \cup S_t$ est contenu dans au moins

$$\frac{k!(w-1)^k}{|S_1 \cup \dots \cup S_t|} \geq (k-1)!(w-1)^{k-1} \text{ ensembles}$$

On se ramène à cette collection de $(k-1)!(w-1)^{k-1}$ ensembles.

Preuve (2)

On a $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_i

\Rightarrow un élément de $S_1 \cup \dots \cup S_t$ est contenu dans au moins

$$\frac{k!(w-1)^k}{|S_1 \cup \dots \cup S_t|} \geq (k-1)!(w-1)^{k-1} \text{ ensembles}$$

On se ramène à cette collection de $(k-1)!(w-1)^{k-1}$ ensembles.
C'est en pratique un collection d'ensembles à au plus $k-1$ éléments, car tous les ensembles ont un élément en commun.

Preuve (2)

On a $t < w$ ensembles S_1, \dots, S_t tels que tout ensemble $S \in \mathcal{S}$ intersecte un des ensembles S_i

\Rightarrow un élément de $S_1 \cup \dots \cup S_t$ est contenu dans au moins

$$\frac{k!(w-1)^k}{|S_1 \cup \dots \cup S_t|} \geq (k-1)!(w-1)^{k-1} \text{ ensembles}$$

On se ramène à cette collection de $(k-1)!(w-1)^{k-1}$ ensembles.
C'est en pratique un collection d'ensembles à au plus $k-1$ éléments, car tous les ensembles ont un élément en commun.

On applique l'induction avec cette collection, $k-1$ et w .
On obtient un tournesol pour \mathcal{S} en ajoutant l'élément en commun dans le coeur du tournesol.

Borne inférieure d'Erdős et Rado

Proposition

Il existe une collection de

$$(w - 1)^k$$

ensembles de taille au plus k qui ne contient pas de tournesol à w pétales.

Borne inférieure d'Erdős et Rado

Proposition

Il existe une collection de

$$(w - 1)^k$$

ensembles de taille au plus k qui ne contient pas de tournesol à w pétales.

Borne sup : $k!(w - 1)^k$

Preuve (1)

$$[n] = \{1, \dots, n\}$$

Preuve (1)

$$[n] = \{1, \dots, n\}$$

On considère tous les sous-ensembles $S \subseteq [k(w-1)]$ tels que :

$$S = \{s_1, \dots, s_k\}$$

avec

$$s_1 \equiv 1 \pmod{k}, \quad \dots, \quad s_k = k \pmod{k}$$

Preuve (1)

$$[n] = \{1, \dots, n\}$$

On considère tous les sous-ensembles $S \subseteq [k(w-1)]$ tels que :

$$S = \{s_1, \dots, s_k\}$$

avec

$$s_1 \equiv 1 \pmod{k}, \quad \dots, \quad s_k \equiv k \pmod{k}$$

C'est effectivement une collection de $(w-1)^k$ ensembles.

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

$\Rightarrow e$ est dans le coeur du tournesol

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

$\Rightarrow e$ est dans le coeur du tournesol

e est l'élément congru à a modulo k pour chaque ensemble du tournesol.

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

$\Rightarrow e$ est dans le coeur du tournesol

e est l'élément congru à a modulo k pour chaque ensemble du tournesol.

C'est vrai pour chaque a .

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

$\Rightarrow e$ est dans le coeur du tournesol

e est l'élément congru à a modulo k pour chaque ensemble du tournesol.

C'est vrai pour chaque a . Donc, les w pétales sont identiques.

Preuve (2)

Supposons qu'il existe un tournesol \mathcal{T} à w pétales.

Soit $a = 1, \dots, k$

Seulement $w - 1$ éléments dans $[k(w - 1)]$ sont congrus à a modulo k .

Par principe des tiroirs, deux des w pétales contiennent le même élément e congru à a modulo k .

$\Rightarrow e$ est dans le coeur du tournesol

e est l'élément congru à a modulo k pour chaque ensemble du tournesol.

C'est vrai pour chaque a . Donc, les w pétales sont identiques.

Contradiction : Il n'existe pas de tournesol à w pétales pour cette collection.

Conjecture du tournesol d'Erdős-Rado

Conjecture

Toute collection d'ensembles de taille au plus k ne contenant pas de tournesol à w pétales contient au plus $C(w)^k$ ensembles, où C est une fonction de w .

Conjecture du tournesol d'Erdős-Rado

Conjecture

Toute collection d'ensembles de taille au plus k ne contenant pas de tournesol à w pétales contient au plus $C(w)^k$ ensembles, où C est une fonction de w .

Si on note $S(k, w)$ la taille maximale d'une collection d'ensembles de taille au plus k ne contenant pas de tournesol à w pétales, on a :

$$(w - 1)^k \leq S(k, w) < k!(w - 1)^k$$

Conjecture du tournesol d'Erdős-Rado

Conjecture

Toute collection d'ensembles de taille au plus k ne contenant pas de tournesol à w pétales contient au plus $C(w)^k$ ensembles, où C est une fonction de w .

Si on note $S(k, w)$ la taille maximale d'une collection d'ensembles de taille au plus k ne contenant pas de tournesol à w pétales, on a :

$$(w - 1)^k \leq S(k, w) < k!(w - 1)^k$$

et la conjecture se réécrit :

$$S(k, w) \leq C(w)^k$$

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

Mieux que Erdős-Rado pour la dépendance en k

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

Mieux que Erdős-Rado pour la dépendance en k

- **Alweiss, Lovett, Wu and Zhang (2019) :**

$$O\left((w^3 \log k \log \log k)^k\right)$$

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

Mieux que Erdős-Rado pour la dépendance en k

- **Alweiss, Lovett, Wu and Zhang (2019) :**

$$O\left((w^3 \log k \log \log k)^k\right)$$

Amélioration substantielle de la dépendance en k

Formule de Stirling : $k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

Mieux que Erdős-Rado pour la dépendance en k

- **Alweiss, Lovett, Wu and Zhang (2019) :**

$$O\left((w^3 \log k \log \log k)^k\right)$$

Amélioration substantielle de la dépendance en k

$$\text{Formule de Stirling : } k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

- **Rao (2020) :**

$$O\left((w \log k)^k\right)$$

Amélioration basée sur les travaux de Alweiss et al.

État de l'art sur la conjecture du tournesol

- **Kostochka (1997) :**

$$O\left(k! \left(\frac{\log \log \log k}{\log \log k}\right)^k\right)$$

pour un tournesol à 3 pétales

Mieux que Erdős-Rado pour la dépendance en k

- **Alweiss, Lovett, Wu and Zhang (2019) :**

$$O\left((w^3 \log k \log \log k)^k\right)$$

Amélioration substantielle de la dépendance en k

$$\text{Formule de Stirling : } k! \sim \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k$$

- **Rao (2020) :**

$$O\left((w \log k)^k\right)$$

Amélioration basée sur les travaux de Alweiss et al.

- **Mishra (3 juin 2026, sur ArXiv) :**
Résolution de la conjecture du tournesol

Table des matières

- 1 Introduction aux tournesols
- 2 Premières bornes pour les tournesols
- 3 Les tournesols robustes**
- 4 Applications

Définition d'un tournesol robuste

Soit $A(\gamma)$ un sous-ensemble aléatoire obtenu en incluant chaque élément de l'univers indépendamment avec probabilité γ .

Définition d'un tournesol robuste

Soit $A(\gamma)$ un sous-ensemble aléatoire obtenu en incluant chaque élément de l'univers indépendamment avec probabilité γ .

Définition

Une famille \mathcal{R} d'au moins 2 sous-ensembles est un (γ, ε) -tournesol robuste si

$$P(\exists S \in \mathcal{R}, S \subseteq A(\gamma) \cup C) \geq 1 - \varepsilon$$

où C désigne l'intersection de tous les ensembles de \mathcal{R} .

Définition d'un tournesol robuste

Soit $A(\gamma)$ un sous-ensemble aléatoire obtenu en incluant chaque élément de l'univers indépendamment avec probabilité γ .

Définition

Une famille \mathcal{R} d'au moins 2 sous-ensembles est un (γ, ε) -tournesol robuste si

$$P(\exists S \in \mathcal{R}, S \subseteq A(\gamma) \cup C) \geq 1 - \varepsilon$$

où C désigne l'intersection de tous les ensembles de \mathcal{R} .

C : coeur du tournesol

Définition d'un tournesol robuste

Soit $A(\gamma)$ un sous-ensemble aléatoire obtenu en incluant chaque élément de l'univers indépendamment avec probabilité γ .

Définition

Une famille \mathcal{R} d'au moins 2 sous-ensembles est un (γ, ε) -tournesol robuste si

$$P(\exists S \in \mathcal{R}, S \subseteq A(\gamma) \cup C) \geq 1 - \varepsilon$$

où C désigne l'intersection de tous les ensembles de \mathcal{R} .

C : coeur du tournesol

Remarque : Deux ensembles du tournesol robuste peuvent s'intersecter en dehors de C .

Le lemme du tournesol robuste

Proposition (Lemme du tournesol robuste)

Il existe une constante $c > 1$ tel que si $\varepsilon \leq 1/2$, alors toute collection de

$$(c \log(k/\varepsilon)/\gamma)^k$$

ensembles de taille au plus k contient un (γ, ε) -tournesol robuste.

Le lemme du tournesol robuste

Proposition (Lemme du tournesol robuste)

Il existe une constante $c > 1$ tel que si $\varepsilon \leq 1/2$, alors toute collection de

$$(c \log(k/\varepsilon)/\gamma)^k$$

ensembles de taille au plus k contient un (γ, ε) -tournesol robuste.

Comparaisons :

- Borne d'Erdős-Rado : $k!(w-1)^k$
- Conjecture d'Erdős-Rado : $C(w)^k$

Le lemme du tournesol robuste

Proposition (Lemme du tournesol robuste)

Il existe une constante $c > 1$ tel que si $\varepsilon \leq 1/2$, alors toute collection de

$$(c \log(k/\varepsilon)/\gamma)^k$$

ensembles de taille au plus k contient un (γ, ε) -tournesol robuste.

Comparaisons :

- Borne d'Erdős-Rado : $k!(w-1)^k$
- Conjecture d'Erdős-Rado : $C(w)^k$

La dépendance en k pour les tournesols robustes est nécessaire : il existe une collection de taille $\Omega\left((\log k)^{k-\sqrt{k}}\right)$ sans $(1/2, 1/2)$ -tournesol robuste.

Lien avec les tournesols

Proposition

Tout $(1/(2w), 1/2)$ -tournesol robuste contient un tournesol à w pétales.

Lien avec les tournesols

Proposition

Tout $(1/(2w), 1/2)$ -tournesol robuste contient un tournesol à w pétales.

On partitionne l'univers uniformément et aléatoirement en $2w$ ensembles disjoints B_1, \dots, B_{2w} .

Lien avec les tournesols

Proposition

Tout $(1/(2w), 1/2)$ -tournesol robuste contient un tournesol à w pétales.

On partitionne l'univers uniformément et aléatoirement en $2w$ ensembles disjoints B_1, \dots, B_{2w} .

D'après la définition de tournesol robuste, on trouve en espérance au moins $2w/2 = w$ ensembles $S_1, \dots, S_w \in \mathcal{R}$ et w parties disjointes B_{j_1}, \dots, B_{j_w} avec

$$C \not\subseteq S_i \subseteq B_{j_i} \cup C$$

Lien avec les tournesols

Proposition

Tout $(1/(2w), 1/2)$ -tournesol robuste contient un tournesol à w pétales.

On partitionne l'univers uniformément et aléatoirement en $2w$ ensembles disjoints B_1, \dots, B_{2w} .

D'après la définition de tournesol robuste, on trouve en espérance au moins $2w/2 = w$ ensembles $S_1, \dots, S_w \in \mathcal{R}$ et w parties disjointes B_{j_1}, \dots, B_{j_w} avec

$$C \subsetneq S_i \subseteq B_{j_i} \cup C$$

Les ensembles S_1, \dots, S_w forment un tournesol à w pétales et de cœur C .

Lien avec les tournesols

Le lemme du tournesol robuste donne que chaque collection de $O\left((w \log k)^k\right)$ ensembles de taille k contient un $(1/(2w), 1/2)$ -tournesol robuste et donc un tournesol à w pétales.

Proposition

Toute collection de plus de $O\left((w \log k)^k\right)$ ensembles de taille au plus k contient un tournesol à w pétales.

Table des matières

- 1 Introduction aux tourneols
- 2 Premières bornes pour les tourneols
- 3 Les tourneols robustes
- 4 Applications**

Aperçu des nombreuses applications

- **Structure de données dynamique**

Exemple : maintenir une structure de données qui permet d'extraire l'élément minimum

Obtention de borne inférieure sur la complexité en temps d'un tel système

Aperçu des nombreuses applications

- **Structure de données dynamique**

Exemple : maintenir une structure de données qui permet d'extraire l'élément minimum

Obtention de borne inférieure sur la complexité en temps d'un tel système

- **Seuil de fonctions monotones**

Utilisée pour l'étude de processus aléatoires

Aperçu des nombreuses applications

- **Structure de données dynamique**

Exemple : maintenir une structure de données qui permet d'extraire l'élément minimum

Obtention de borne inférieure sur la complexité en temps d'un tel système

- **Seuil de fonctions monotones**

Utilisée pour l'étude de processus aléatoires

- **Complexité des circuits monotones**

Circuits monotones

Un *circuit monotone* est un modèle informatique représenté par un DAG (graphe dirigé acyclique).

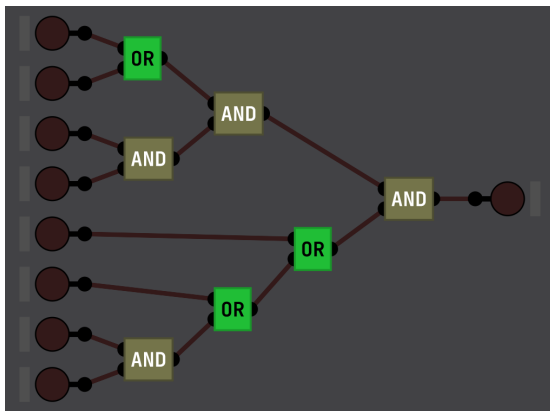


Figure: Un circuit monotone

Circuits monotones

- Entrée : variables booléennes x_1, \dots, x_m

Circuits monotones

- Entrée : variables booléennes x_1, \dots, x_m
- Nœuds internes : AND ou OR (pas de NOT)

Circuits monotones

- Entrée : variables booléennes x_1, \dots, x_m
- Nœuds internes : AND ou OR (pas de NOT)

Les circuits monotones ne peuvent calculer que les fonctions booléennes monotones.

→ si une entrée est changée de 0 à 1, alors jamais la sortie ne change de 1 en 0.

Circuits monotones

- Entrée : variables booléennes x_1, \dots, x_m
- Nœuds internes : AND ou OR (pas de NOT)

Les circuits monotones ne peuvent calculer que les fonctions booléennes monotones.

→ si une entrée est changée de 0 à 1, alors jamais la sortie ne change de 1 en 0.

- Sortie : une unique variable booléenne y

Circuits monotones

- Entrée : variables booléennes x_1, \dots, x_m
- Nœuds internes : AND ou OR (pas de NOT)

Les circuits monotones ne peuvent calculer que les fonctions booléennes monotones.

→ si une entrée est changée de 0 à 1, alors jamais la sortie ne change de 1 en 0.

- Sortie : une unique variable booléenne y
- Taille : nombre de portes AND et OR

Intérêt des circuits monotones

Les circuits monotones sont un modèle informatique plus simple que les circuits booléens classiques (qui autorisent le NOT).

Ils permettent d'étudier la complexité sur un modèle d'expressivité limitée.

Intérêt des circuits monotones

Les circuits monotones sont un modèle informatique plus simple que les circuits booléens classiques (qui autorisent le NOT).

Ils permettent d'étudier la complexité sur un modèle d'expressivité limitée.

Ici, on va prouver une borne inférieure exponentielle pour le calcul de certaines fonctions avec des circuits monotones.

Une telle borne pour les circuits booléens en général résoudrait le problème P vs NP.

Détection de cliques avec les circuits monotones

Entrée : x_1, \dots, x_m encode un graphe à n sommets avec $m = \binom{n}{2}$

La variable x_i indique si la i ème arête est présente.

Sortie : L'objectif est de déterminer si le graphe contient une clique de taille $k \approx n^{1/3}$.

1 si le graphe contient une telle clique, 0 sinon.

Résultat : Un circuit monotone calculant cette fonction a nécessairement une taille exponentielle en m .

Preuve (1)

On suppose qu'il existe un "petit" circuit monotone qui calcule si le graphe a une clique de taille k .

Preuve (1)

On suppose qu'il existe un "petit" circuit monotone qui calcule si le graphe a une clique de taille k .

Soit G un graphe aléatoire contenant une clique de taille k et aucune autre arête.

Preuve (1)

On suppose qu'il existe un "petit" circuit monotone qui calcule si le graphe a une clique de taille k .

Soit G un graphe aléatoire contenant une clique de taille k et aucune autre arête.

Soit H un graphe aléatoire $(k - 1)$ -parti (les sommets sont partitionnés en $k - 1$ parts et il y a toutes les arêtes connectant deux parts distinctes).
Remarquons que H ne contient jamais une clique de taille k (mais plein de cliques de taille $k - 1$).

Preuve (1)

On suppose qu'il existe un "petit" circuit monotone qui calcule si le graphe a une clique de taille k .

Soit G un graphe aléatoire contenant une clique de taille k et aucune autre arête.

Soit H un graphe aléatoire $(k - 1)$ -parti (les sommets sont partitionnés en $k - 1$ parts et il y a toutes les arêtes connectant deux parts distinctes).
Remarquons que H ne contient jamais une clique de taille k (mais plein de cliques de taille $k - 1$).

Soit F un graphe aléatoire qui vaut G avec probabilité $1/2$ et H avec probabilité $1/2$.

Preuve (2)

Pour un ensemble S , soit $\text{clique}_S(X)$ la fonction booléenne qui vaut 1 si S est une clique dans le graphe X .

Preuve (2)

Pour un ensemble S , soit $\text{clique}_S(X)$ la fonction booléenne qui vaut 1 si S est une clique dans le graphe X .

Claim

Si un "petit" circuit monotone f calcule si un graphe a une clique de taille k , alors il existe une "petite" collection d'ensembles S_1, \dots, S_T telle que

$$f(F) = \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(F)$$

soit vrai avec forte probabilité (sur le choix de F).

Preuve (2)

Pour un ensemble S , soit $\text{clique}_S(X)$ la fonction booléenne qui vaut 1 si S est une clique dans le graphe X .

Claim

Si un "petit" circuit monotone f calcule si un graphe a une clique de taille k , alors il existe une "petite" collection d'ensembles S_1, \dots, S_T telle que

$$f(F) = \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(F)$$

soit vrai avec forte probabilité (sur le choix de F).

Pour calculer f correctement sur F , il est facile de voir que T doit être exponentiellement grand. Ce qui est une contradiction.

Preuve (3)

Il est donc suffisant de trouver une collection d'ensembles S_1, \dots, S_T telle que

$$f(F) = \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(F)$$

soit vrai avec forte probabilité (sur le choix de F).

Preuve (3)

Il est donc suffisant de trouver une collection d'ensembles S_1, \dots, S_T telle que

$$f(F) = \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(F)$$

soit vrai avec forte probabilité (sur le choix de F).

Pour chaque porte p du circuit, on trouve une collection d'ensembles $S_1, \dots, S_T \subseteq [m]$ telle que

$$p(G) \leq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(G)$$

et

$$p(H) \geq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(H)$$

Preuve (3)

Il est donc suffisant de trouver une collection d'ensembles S_1, \dots, S_T telle que

$$f(F) = \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(F)$$

soit vrai avec forte probabilité (sur le choix de F).

Pour chaque porte p du circuit, on trouve une collection d'ensembles $S_1, \dots, S_T \subseteq [m]$ telle que

$$p(G) \leq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(G)$$

et

$$p(H) \geq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(H)$$

→ Par induction

Preuve (4)

C'est possible car :

- La variable x_i est égale à clique_e avec e la i ème arête du graphe.

Preuve (4)

C'est possible car :

- La variable x_i est égale à clique_e avec e la i ème arête du graphe.
- Le OR de deux expressions de tailles T_1 et T_2 donne une expression de taille $T_1 + T_2$.

Preuve (4)

C'est possible car :

- La variable x_i est égale à clique_e avec e la i ème arête du graphe.
- Le OR de deux expressions de tailles T_1 et T_2 donne une expression de taille $T_1 + T_2$.
- Le AND de deux expressions de tailles T_1 et T_2 donne une expression de taille $T_1 \times T_2$ en utilisant la distributivité de AND et OR et les formules suivantes :

$$\text{clique}_{S_1}(G) \wedge \text{clique}_{S_2}(G) = \text{clique}_{S_1 \cup S_2}(G)$$

et

$$\text{clique}_{S_1}(H) \wedge \text{clique}_{S_2}(H) \geq \text{clique}_{S_1 \cup S_2}(H)$$

Preuve (5)

Problème : A cause de la distributivité de AND sur OR, on obtient potentiellement une expression de taille T exponentielle en la taille du circuit.

Preuve (5)

Problème : A cause de la distributivité de AND sur OR, on obtient potentiellement une expression de taille T exponentielle en la taille du circuit.

On va utiliser les tournesols pour donner une bonne approximation.

Preuve (5)

Problème : A cause de la distributivité de AND sur OR, on obtient potentiellement une expression de taille T exponentielle en la taille du circuit.

On va utiliser les tourneols pour donner une bonne approximation.

Si un ensemble S_i dans $\bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(X)$ a une taille plus grande que k , alors on peut retirer S_i de la collection (car $\text{clique}_{S_i}(X) = 0$ pour $X = G$ ou H).

Preuve (5)

Problème : A cause de la distributivité de AND sur OR, on obtient potentiellement une expression de taille T exponentielle en la taille du circuit.

On va utiliser les tourneols pour donner une bonne approximation.

Si un ensemble S_i dans $\bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(X)$ a une taille plus grande que k , alors on peut retirer S_i de la collection (car $\text{clique}_{S_i}(X) = 0$ pour $X = G$ ou H).

On peut donc supposer que tous les ensembles ont taille au plus k .

Preuve (6)

L'observation centrale pour utiliser les tournesols :

Si w est grand et S_1, \dots, S_w forme un tournesol de coeur C , alors

$$\bigvee_{j=1}^w \text{clique}_{S_j}(G) \leq \text{clique}_C(G)$$

par définition,

Preuve (6)

L'observation centrale pour utiliser les tournesols :

Si w est grand et S_1, \dots, S_w forme un tournesol de coeur C , alors

$$\bigvee_{j=1}^w \text{clique}_{S_j}(G) \leq \text{clique}_C(G)$$

par définition, et

$$\bigvee_{j=1}^w \text{clique}_{S_j}(H) \geq \text{clique}_C(H)$$

avec grande probabilité sur le choix de H .

Preuve (6)

L'observation centrale pour utiliser les tournesols :

Si w est grand et S_1, \dots, S_w forme un tournesol de coeur C , alors

$$\bigvee_{j=1}^w \text{clique}_{S_j}(G) \leq \text{clique}_C(G)$$

par définition, et

$$\bigvee_{j=1}^w \text{clique}_{S_j}(H) \geq \text{clique}_C(H)$$

avec grande probabilité sur le choix de H .

Pourquoi ? Si C est une clique, les événements que les pétales sont aussi des cliques sont indépendants. En choisissant les paramètres intelligemment, chacun de ces événements arrivent avec une bonne probabilité.

Preuve (7)

Finalement, si T est large dans $\bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(X)$, on simplifie cette expression en utilisant le lemme du tournesol et en remplaçant le tournesol trouvé par son cœur.

Preuve (7)

Finalement, si T est large dans $\bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(X)$, on simplifie cette expression en utilisant le lemme du tournesol et en remplaçant le tournesol trouvé par son cœur.

Avec grande probabilité, on préserve les équations :

$$p(G) \leq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(G)$$

et

$$p(H) \geq \bigvee_{i=1}^T \text{clique}_{S_i}(H)$$

On répète cette opération jusqu'à ce que T soit "petit" et cela prouve le Claim.

Complexité des circuits monotones

Proposition

Un circuit monotone déterminant la présence d'une clique de taille $\approx n^{1/3}$ dans un graphe de taille n a une taille exponentielle en n .

Conclusion

Lemme du tourneol : Un bon potentiel pour être appliqué, en particulier dans la recherche de borne inférieure en théorie de l'information et pour la complexité.

Conclusion

Lemme du tournesol : Un bon potentiel pour être appliqué, en particulier dans la recherche de borne inférieure en théorie de l'information et pour la complexité.

Un grand nombre de structures dans un graphe et vous souhaitez réduire le nombre de structures : Demandez-vous

Y a-t-il un tournesol ?



Conclusion

Lemme du tournesol : Un bon potentiel pour être appliqué, en particulier dans la recherche de borne inférieure en théorie de l'information et pour la complexité.

Un grand nombre de structures dans un graphe et vous souhaitez réduire le nombre de structures : Demandez-vous

Y a-t-il un tournesol ?



Source : Rao, A. (2026), The story of sunflowers. J. London Math. Soc., 113: e70380. <https://doi.org/10.1112/jlms.70380>